〔 I 〕 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) n を3以上の自然数とする．2枚の硬貨を用意し，その2枚の硬貨を n 回くり返し投げ，k 回目に表が出た枚数を X_k とする．0以上の整数 m に対して，$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \geqq m$ である確率を $p_n(m)$ とする．このとき，$p_3(2)$ の値は $\boxed{\text{ア}}$．また，$p_n(2026) > 0$ となる n のうち，最小のものは $\boxed{\text{イ}}$．次に，$p_n(1)$，$p_n(2^{n-1})$，$p_n(5)$ を n の式で表すとそれぞれ $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{4^n}$，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{4^n}$，$\dfrac{3^n - (\boxed{\text{オ}})2^{n-3}}{4^n}$．

(2) i を虚数単位とし，複素数平面上の原点 O とは異なる点 z に対し，$\alpha = z^2 + \dfrac{1}{z^2}$，$\beta = \left(z - \dfrac{1}{z}\right)\left(z^5 - \dfrac{1}{z^5}\right)$ とする．このとき，β は α の3次式となり，この式の定数項は $\boxed{\text{カ}}$．点 z が点1と点 $\sqrt{2}$ を結ぶ線分上を動くとき，β は実数であり，β の最大値は $\boxed{\text{キ}}$．また，実数 θ に対し $z = \cos\theta + i\sin\theta$ であるとき，$t = \cos 2\theta$ として α を t の式で表すと，$\alpha = \boxed{\text{ク}}$．したがって，点 z が原点 O を中心とする半径1の円上を動くとき，β は実数となり，β の最小値および最大値はそれぞれ $\boxed{\text{ケ}}$，$\dfrac{25}{27} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{10}$．

〔 II 〕 関数 $f(x) = \log(1 + e^x) - \dfrac{x}{2}$ とする．関数 $f(x)$ の第1次，第2次，第3次導関数をそれぞれ $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ で表す．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$，$f(\log 2)$ の値をそれぞれ求めよ．また，$f'(x) = \alpha - \dfrac{1}{1 + e^x}$ となる定数 α の値を求めよ．

(2) $\log f''(x) = kf(x)$ となる定数 k の値を求めよ．

(3) 関数 $g(u) = u(\log u)^2 \quad (u > 0)$ とし，合成関数 $g(f''(x))$ を考える．このとき，$\dfrac{d}{dx}g(f''(x)) = h(X)f'''(x)$ を満たす $h(X)$ について，$h(X)$ を X の多項式で表せ．ただし，$X = \log f''(x)$ とする．

(4) $I = 36\displaystyle\int_0^{\log 2}\Big(\{f(x)\}^2 - f(x)\Big)f'''(x)dx$ とし，$a = \log 2$，$b = \log 3$ とする．$I = Ab^2 + Bab + Ca^2$ を満たす整数 A，B，C の値を求めよ．

〔Ⅲ〕 実数 t に対して，座標平面上の領域 D_1，D_2 および E をそれぞれ

$$D_1:\ x^2+y^2-4x-8y+18 \leqq 0$$

$$D_2:\ y^2-4x-2ty+8+t^2 \leqq 0$$

$$E:\ x^2+2y^2-8x-(8+2t)y+26+t^2 \leqq |x^2-(8-2t)y+10-t^2|$$

で定める．正の実数 $s>0$ に対して，原点を通る傾き s の直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ と領域 D_1 がただ1つの共有点をもつような s の値をすべて求め，そのときの共有点の座標を求めよ．

(2) 直線 ℓ と領域 D_2 がただ1つの共有点をもつとき，s を t の式で表せ．

(3) 次の条件 (i)，(ii)，(iii) を同時に満たす点 (a,b) の全体で作られる図形の面積を求めよ．

(i) $a+b \leqq |a-b|$ (ii) $-1 \leqq a \leqq 1$ (iii) $-1 \leqq b \leqq 1$

(4) 直線 ℓ と領域 E が共有点をちょうど2つもつような s，t の値の組 (s,t) を求めよ．

〔Ⅳ〕 n を自然数とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次の関係式で定める．

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_1=0,\quad b_2=1,\quad b_{n+2}=b_{n+1}+\frac{b_n}{n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

また，p，q を0でない実数とし，数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を次で定める．

$$c_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^n e^x\,dx,\quad d_n=(-1)^n(pa_n+qb_n)$$

ただし，$0!=1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4，b_3，c_1，c_2 の値をそれぞれ求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

(3) $c_{n+1}+\dfrac{n+1}{n}c_n=\dfrac{k}{n!}$ を満たす定数 k の値を求めよ．これを用いて，$c_{n+2}+c_{n+1}=r_nc_n$ を満たす r_n について，r_n を n の式で表せ．

(4) $d_{n+2}+d_{n+1}=s_nd_n$ を満たす s_n について，s_n を p，q を含まない n の式で表せ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n)$ を求めよ．

201