1

(30 点)

t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする．座標平面において，円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上で，y 座標が t であり，さらに第 1 象限にある点 P をとる．点 P における C の接線を l とし，放物線 $y = 2 - x^2$ と接線 l で囲まれる図形の面積を S とする．t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，S の最小値を求めよ．

2

(30 点)

r は正の実数とする．1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA 上に点 P をとる．点 P が辺 OA 上のどこにあっても，点 P を中心とする半径 r の球面が，辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ．ただし，点 O，A は辺 OA に含まれ，点 B，C は辺 BC に含まれるとする．

3

(30 点)

p は 3 より大きい素数とする．

(1) $2p$ 以上の整数 N は，0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができることを示せ．

(2) 0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができないような 0 以上の整数 N の個数を求めよ．

4

(30 点)

実数 x に対して，$l \leqq x$ を満たす最大の整数 l を $[x]$ で表す．正の整数 n に対して，$a_n = \sum_{k=1}^{n} [\log_3 k]$ と定める．

(1) a_{26} を求めよ．

(2) N を正の整数とし，$m = 3^N - 1$ とするとき，a_m を N を用いて表せ．

5

(30 点)

n は 3 以上の整数とする．1 から n までの番号が書かれた n 枚の札が袋に入っている．ただし，同じ番号が書かれた札はないとする．この袋から 3 枚の札を同時に取り出し，一番大きな番号を X とする．X の期待値を求めよ．

問題は，このページで終わりである。