第　1　問

(1) 関数 $f(\theta) = \sin\theta - \theta + \dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $-1 \leqq \theta \leqq 1$ における最大値 M および最小値 m を求めよ。

(2) (1) で定めた M に対し，次の不等式を示せ。

$$\frac{7}{8}\pi \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x)\, dx \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

第　2　問

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x, y) \mid x,\ y \text{ は } 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる 3 点を選ぶ。ただし，どの 3 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。

(2) m を 2 以上の整数とする。p_{2m} を求めよ。

第　3　問

座標空間内の原点を中心とする半径 5 の球面を S とする。S 上の相異なる 3 点 P, Q, R が次の条件を満たすように動く。

条件： P, Q は xy 平面上にあり，三角形 PQR の重心は G$(2, 0, 1)$ である。

以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点 M の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2) 線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

第　4　問

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y = x^3 - kx$ で定める。C 上の 2 点 P, Q に対する以下の条件 $(*)$ を考える。

条件 $(*)$　原点 O，点 P，点 Q は相異なり，C の O, P, Q における接線のうち，どの 2 本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる。

ただし，2 直線のなす角は 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

(1) 条件 $(*)$ を満たす P, Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(2) k が (1) で定まる範囲にあるとする。P, Q が条件 $(*)$ を満たすように動くとき，C の O, P, Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく。ただし，3 本の接線が 1 点で交わるときは $S = 0$ とする。$M = 4m$ となる k の値を求めよ。

第　5　問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。複素数 α と C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対し，$w = (z - \alpha)^3$ とおく。P が C 上を動くときの点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡を D とする。

(1) $\alpha = -3$ とし，w の偏角を θ とおく。P が C 上を動くとき，$\sin\theta$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α が次の条件を満たすように動く。

条件：　D は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ。

複素数平面上の点 $\mathrm{R}(\alpha)$ が動きうる範囲の面積を求めよ。

第　6　問

n を正の整数とする。n の正の約数のうち，3 で割って 1 余るものの個数を $f(n)$，3 で割って 2 余るものの個数を $g(n)$ とする。

(1) $f(2800)$, $g(2800)$ を求めよ。

(2) $f(n) \geqq g(n)$ を示せ。

(3) $g(n) = 15$ であるとき，$f(n)$ がとりうる値を求めよ。